

用半离散中心迎风格式计算一维浅水方程

陈建忠, 史忠科

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 将半离散中心迎风数值通量和三阶 WENO 重构结合起来, 由此得到了一种求解一维浅水方程的高分辨率数值方法. 对底坡项的离散保证了计算方法的和谐性, 离散摩阻项的方法简单有效. 时间的离散采用保持强稳定性质的 Runge-Kutta 方法. 应用文中方法对几个典型算例进行检验计算, 结果表明本文方法健全, 而且对激波具有较高的分辨率.

关键词: 一维浅水方程; 中心迎风格式; WENO 重构

中图分类号: TV131.3:TV131.4 文献标识码: A 文章编号: 1009-640X(2007)01-0007-05

Numerical solution of one-dimensional shallow water equations by semi-discrete central-upwind scheme

CHEN Jian-zhong, SHI Zhong-ke

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A high-resolution method for solving one-dimensional shallow water equations is presented by combining the semi-discrete central-upwind numerical flux with the third-order weighted essentially non-oscillatory (WENO) reconstruction. The discretization of bottom topography assures well-balanced approximation and the discretization of friction slope is simple and effective. The third-order strong stability preserving Runge-Kutta method is used for time discretization. Validity of several typical samples show that this method is effective and has high precision for shock waves.

Key words: one-dimensional shallow water equations; central-upwind scheme; WENO reconstruction

常用于描述河流、湖泊、河口及近海中流动问题的浅水方程, 在数学上属于非线性双曲型方程, 其解可能产生间断. 常规的有限差分格式并不能同时满足间断处无虚假振荡和光滑区域解的高精度要求, 不是过分耗散就是数值振荡. 处理间断是数值求解浅水方程的难点之一. 半离散中心迎风格式^[1]则是一种求解双曲型方程的高精度、高分辨率有限差分方法. 该格式的优点为: ①既不用精确或近似的黎曼解算器, 也不用进行特征分解或通量分裂; ②利用波传播的单侧局部速度以估计 Riemann 扇的宽度, 又使其具有迎风的性质; ③对激波等间断的分辨率高, 且易于推广到多维情况和带有源项及刚性源项的问题. 对于一维问题, 半离散格式的精度和无振荡性由分片重构决定. 在各种无振荡重构中, 发展较好的是 WENO 重构^[2,3]. WENO 重构是在

收稿日期: 2006-07-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60134010)

作者简介: 陈建忠(1976-), 男, 宁夏盐池人, 讲师, 博士, 主要从事计算水动力学研究.

ENO 重构^[4]的基础上发展起来的. ENO 重构的主要思路是选取某种意义下最光滑的模板进行插值, 以实现基本无振荡. WENO 重构是将各个备选模板上的插值多项式进行凸组合, 选取权值则依赖于模板上数值解的光滑性. 文献[5]以线性重构和二次重构为基础, 将半离散中心迎风格式推广到非平底浅水方程. 本文将半离散中心迎风数值通量^[1]和三阶 WENO 重构^[3]结合起来, 利用半离散中心迎风数值通量简单、实用, 以及 WENO 重构高精度、基本无振荡的优点, 得到一种求解一维浅水方程的高分辨率数值方法. 对底坡项的离散保证了计算格式的和谐性, 离散摩阻项的方法简单有效. 时间的离散采用保持强稳定性的 Runge-Kutta 方法^[6]. 最后, 用 3 个数值算例对该方法进行了验证.

1 控制方程

考虑一维浅水方程
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S_1 + S_2 \quad (1)$$

式中: $U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$, $S_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghB_x \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \end{bmatrix}$, h 为水深, u 为流速; g 为重力加速度; B

为河底高程, 阻力项 $S_{fx} = n^2(u\sqrt{u^2 + v^2})h^{-4/3}$, n 为曼宁系数.

为了便于离散源项, 令水位 $w = h + B$, 则 (1) 式中的 $U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} hu \\ (hu)^2 / (w - B) + \frac{1}{2}g(w - B)^2 \end{bmatrix}$, $S_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(w - B)B_x \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(w - B)S_{fx} \end{bmatrix}$. 以守恒变量 $U = [w \quad hu]^T$ (其中, hu 为单宽流量) 表示的浅水方程就特别适合处理稳态解^[5].

2 离散格式

为简单起见, 采用均匀网格. 并记: $x_j = j\Delta x$, $x_{j\pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x$, 其中, Δx 为空间步长, Δt 为时间步长. 以 $U_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} U(\xi, t^n) d\xi$ 表示 $t = t^n$ 时间层网格 $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上的均值.

半离散中心迎风格式对一维浅水方程(1)式的离散方法为

$$\frac{d}{dt} U_j(t) = - \frac{H_{j+1/2}(t) - H_{j-1/2}(t)}{\Delta x} + \bar{S}_{i,j}(t) + \tilde{S}_{i,j}(t) \quad (2)$$

式中: 数值通量

$$H_{j+1/2}(t) = \frac{a_{j+1/2}^+ F(U_{j+1/2}^-) - a_{j+1/2}^- F(U_{j+1/2}^+)}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} + a_{j+1/2}^+ a_{j+1/2}^- \left[\frac{U_{j+1/2}^+ - U_{j+1/2}^-}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} \right];$$

波传播的单侧局部速度

$$a_{j+1/2}^+ = \max \left\{ \lambda_N \left(\frac{\partial F}{\partial U} (U_{j+1/2}^-) \right), \lambda_N \left(\frac{\partial F}{\partial U} (U_{j+1/2}^+) \right), 0 \right\}, \quad a_{j+1/2}^- = \min \left\{ \lambda_1 \left(\frac{\partial F}{\partial U} (U_{j+1/2}^-) \right), \lambda_1 \left(\frac{\partial F}{\partial U} (U_{j+1/2}^+) \right), 0 \right\};$$

定义网格界面处的值 $U_{j+1/2}^+ = R_{j+1}^n(x_{j+1/2}, t^n)$, $U_{j+1/2}^- = R_j^n(x_{j+1/2}, t^n)$. 它们是分片重构 $V(x, t^n) = \sum_j R_j^n(x) \chi_j(x)$ 在 $x_{j+1/2}$ 左侧和右侧的值, χ_j 为 I_j 上的特征函数, $V(x, t^n)$ 为由网格均值 $\{U_j^n\}$ 构造的分片插值多项式. 本文采用三阶 WENO 重构^[3] 计算网格界面处的值, 即

$$U_{j+1/2}^- = R_j^n(x_{j+1/2}, t^n) = \sum_{l=0}^1 \omega_l P_l(x_{j+1/2}), \quad U_{j-1/2}^+ = R_j^n(x_{j-1/2}, t^n) = \sum_{l=0}^1 \omega_l P_l(x_{j+1/2})$$

式中: $P_0(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}U_j + \frac{1}{2}U_{j+1}$, $P_1(x_{j+\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}U_{j-1} + \frac{3}{2}U_j$, $\tilde{P}_0(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}U_j - \frac{1}{2}U_{j+1}$, $\tilde{P}_1(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}U_{j-1} + \frac{1}{2}U_j$;

相应的权值为

$$\omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum_{m=0}^1 \alpha_m}, \quad \alpha_l = \frac{C_l}{(\varepsilon + IS_l)^2}, \quad (l=0,1), \quad C_0 = \frac{2}{3}, \quad C_1 = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{\omega}_l = \frac{\tilde{\alpha}_l}{\sum_{m=0}^1 \tilde{\alpha}_m}, \quad \tilde{\alpha}_l = \frac{\tilde{d}_l}{(\varepsilon + IS_l)^2}, \quad (l=0,1), \quad \tilde{C}_0 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{C}_1 = \frac{2}{3};$$

光滑因子 $IS_0 = (U_{j+1} - U_j)^2$, $IS_1 = (U_j - U_{j-1})^2$.

一维浅水方程(1)式的稳态解应满足

$$hu = C_1, \quad \frac{1}{2}u^2 + g(h + B) = C_2 \quad (3)$$

式中: C_1, C_2 为常数.

静水时的稳态条件则为 $u = 0, w = h + B = C_2$

(3)式不仅要求在床底高程函数的光滑区域成立,而且在床底高程函数的间断处也要求成立. 如果数值方法满足稳态条件(3)式,或者对床底高程函数含有间断问题,且至少应具有二阶精度,则称该方法是和谐的^[7].

(1)式中的源项包括底坡和摩阻两项,只有底坡项影响解的和谐性. 潘存鸿等^[8]采用的水位方程法, S. Jin等^[7]提出的单元均值法和界面法,可离散底坡项,且对齐次项的求解均利用 Godunov 格式或 MUSCL 格式. 本文采用文献[5]中的方法离散底坡源项 $\tilde{S}_j = (0, \tilde{S}_j^{(2)})$.

$$\tilde{S}_j^{(2)}(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} S_1^{(2)}(U) dx \approx \frac{B(x_{j+\frac{1}{2}}) - B(x_{j-\frac{1}{2}})}{\Delta x} \frac{(w_{j+\frac{1}{2}}^- - B(x_{i+\frac{1}{2}})) + (w_{j-\frac{1}{2}}^+ - B(x_{i-\frac{1}{2}}))}{2} \quad (4)$$

式中: $S_1^{(2)}(U)$ 为 $S_1(U)$ 的第二个分量.

对于摩阻源项 $\tilde{S}_j = (0, \tilde{S}_j^{(2)})$, 则可直接用 Simpson 公式近似

$$\tilde{S}_j^{(2)}(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} S_2^{(2)}(U) dx \approx \frac{1}{6} (S_2^{(2)}(U_{j+\frac{1}{2}}^-) + 4S_2^{(2)}(U_j) + S_2^{(2)}(U_{j-\frac{1}{2}}^+)) \quad (5)$$

式中: $S_2^{(2)}(U)$ 为 $S_2(U)$ 的第二个分量.

最后,用最优的三阶保持强稳定性的 Runge-Kutta 方法^[7]对(2)式的时间方向进行离散.

3 算例

在下列算例中,将本文方法简记为 SDW3,并用 N 表示空间网格数目,时间步长的选取有赖于 CFL 条件,即 $\text{CFL} = \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |F'(U)| \right] \leq 0.5$, 本文的 CFL 数均取为 0.48. 除算例 3 外,重力加速度均取 $g=1$.

算例 1 R. J. Le Veque 等^[9]给出了一维水波跃过障碍的问题.

令:计算区域为 $[0, 1]$; 河底高程

$$B(x) = \begin{cases} 0.25 \{ \cos(10\pi(x - 1.5)) + 1 \} & |x - 0.5| \leq 0.1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

初始条件 $w(x, 0) = \begin{cases} 1.0 + \varepsilon_1 & 0.1 < x < 0.2 \\ 1.0 & \text{其它} \end{cases}; \quad (hu)(x, 0) = 0$

其中: ε_1 为非零的扰动常数,理论上,小扰动 ε_1 以特征速度 $\pm\sqrt{gh}$ 分别向左、右两边传播. 本文采用两种扰动常数,即 $\varepsilon_1=0.20$ 和 0.01 . 网格点 $N=200$, 计算到 $t=0.7$. SDW3 方法的计算结果见图 1. 图中实线为网格点 $N=1600$. SDW3 方法的计算结果可看作是精确解,则表明本文的方法较好地解决了该问题的准稳态.

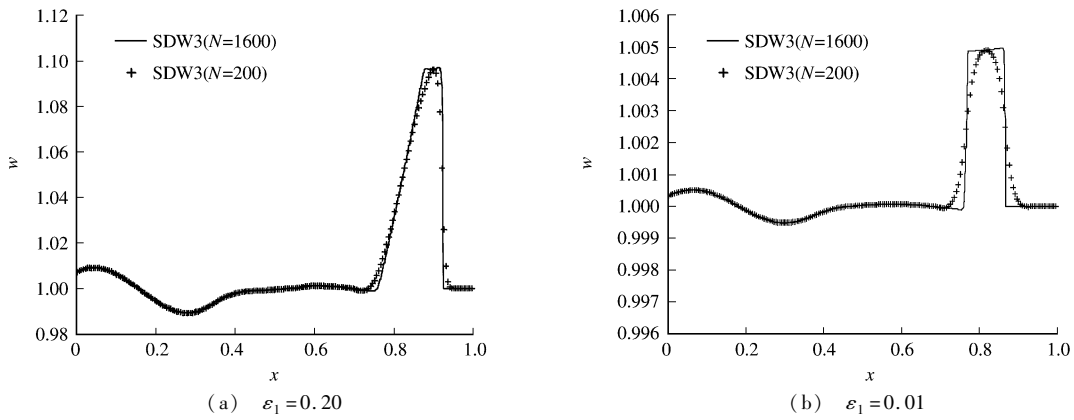


图 1 Le Veque 水波跃过障碍的问题,水位图($t=0.7$)
Fig. 1 Water level curves for Le Veque wave over bump at $t=0.7$

算例 2 文献[10]计算了初值间断、河底高程连续的溃坝问题.

计算区域为 $[0,1]$. 河底高程 $B(x) = 1.398 - 0.347 \tanh(8x - 4)$,

$$\text{初始条件为 } w(x,0) = \begin{cases} 1.0 + B(x) & x \leq 0.6 \\ 0.2 + B(x) & x > 0.6 \end{cases}; (hu)(x,0) = 0$$

$t=0.25$ 时刻、网格数 $N=100$ 的计算结果见图 2. 图中的圆圈为数值解,实线为取 $N=5000$ 时 SDW3 方法的计算结果,可看作是精确解.

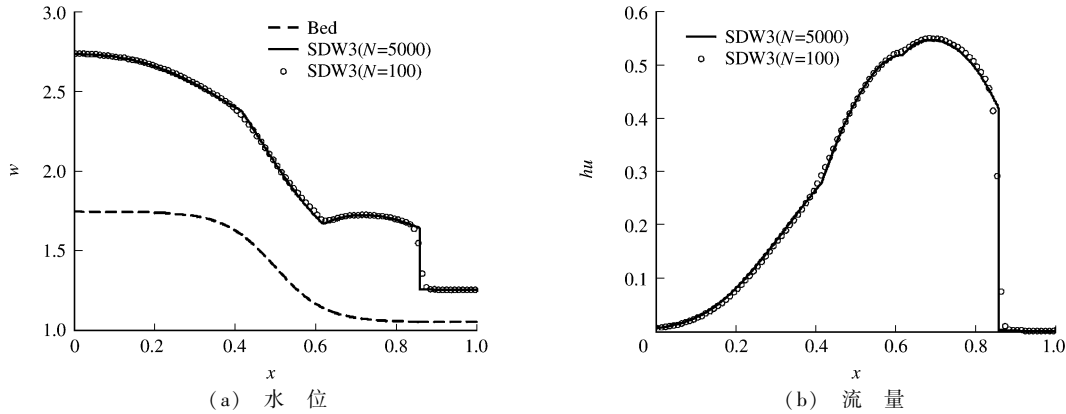


图 2 河底高程连续的溃坝问题($t=0.25$)
Fig. 2 Water level and discharge curves for dam-break wave over continuous riverbed at $t=0.25$

算例 3 文献[11]对河底高程间断的溃坝问题进行了数值模拟.

计算域为 $x \in [0,1500]$. 河底高程 $B(x) = \begin{cases} 8 & |x - 750| \leq 1500/8 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$$\text{初始条件 } w(x,0) = \begin{cases} 20 & x \leq 750 \\ 15 & \text{其它} \end{cases}; (hu)(x,0) = 0$$

取糙率 $n=0$ 和 0.1 ,重力加速度 $g=9.81 \text{ m/s}^2$. $t=15$ 和 60 s 时 SDW3 方法的计算结果见图 3. 可见,SDW3 方法的数值结果不仅稳定,也没有产生非物理振荡.

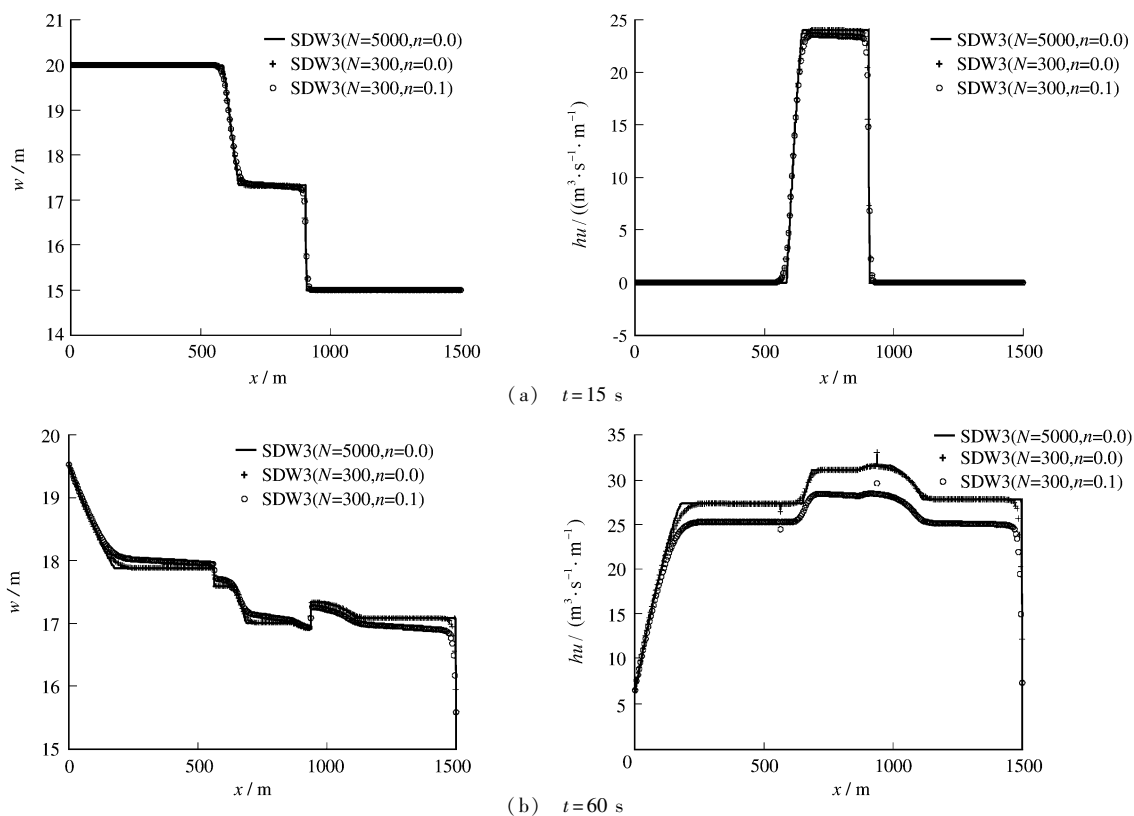


图3 河底高程间断的溃坝问题

Fig. 3 Dam-break wave over discontinuous riverbed

4 结 语

本文基于三阶 WENO 重构和半离散中心迎风数值通量,给出了一种求解一维浅水方程的数值方法.3 个算例计算结果表明,本文方法和谐,且具有较高的分辨率.

参 考 文 献:

- [1] Kurganov A, Noelle S, Petrova G. Semi-Discrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations[J]. **SIAM J Sci Comput**, 2001, 23(3): 707-740.
- [2] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. **J Comput Phys**, 1994, 115: 200-212.
- [3] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of WENO schemes[J]. **J Comput phys**, 1996, 147: 202-228.
- [4] Harten A, Engquist B, Osher S, *et al*. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory scheme (III) [J]. **J Comput Phys**, 1987, 71: 231-303.
- [5] Kurganov A, Levy D. Central-upwind schemes for the Saint-Venant system[J]. **Math Model Numer Anal**, 2002, 36: 397-425.
- [6] Gottlieb S, Shu C W, Tadmor E. Strong stability preserving high order time discretization methods[J]. **SIAM Rev**, 2001, 43(1): 89-112.
- [7] Jin S, Wen X. An efficient method for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations[J]. **J Comp Math**, 2004, 22: 230-249.
- [8] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 一维浅水流动方程的 Godunov 格式求解[J]. **水科学进展**, 2003, 14(4): 430-436.
- [9] LeVeque R J, Pelanti M. A class of approximated Riemann solvers and their relation to relaxation schemes[J]. **J Comput Phys**, 2001, 172: 572-591.
- [10] Crnjaric-Zic N, Vukovic S, Sopta L. Improved non-staggered central NT schemes for balance laws with geometrical source terms[J]. **Int J Numer Meth Fluids**, 2004, 46(8): 849-876.
- [11] Crnjaric-Zic N, Vukovic S, Sopta L. Balanced finite volume WENO and central WENO schemes for the shallow water and the open-channel flow equations[J]. **J Comput Phys**, 2004, 200: 512-548.