

# SPH方法在自由面问题中的应用

张喜秋<sup>1</sup>, 于昌利<sup>2</sup>

(1. 山东交通学院 海运学院, 山东 威海 264200; 2. 哈尔滨工业大学 船舶工程学院, 山东 威海 264209)

**摘要:** 作为无网格粒子法, SPH法在处理大变形、自由面流动问题时具有显著的优势. 介绍了SPH法的基本数值方法, 并基于SPH法数值模拟了2个二维溃坝问题, 将计算结果与试验数据进行了比较, 结果表明: SPH法在处理自由面时具有很强的适应性. 尽管水面发生了翻卷、破碎等剧烈的变化, 但SPH法仍然能够较好地捕捉到这些流动现象, 同时数值模拟得到的水头位置和自由面形状均能与试验结果相吻合, 表明SPH法在处理自由面问题时具有较高的准确性及可靠性.

**关键词:** 无网格粒子法; SPH法; 自由面; 溃坝

**中图分类号:** O351.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1009-640X(2011)02-0065-06

自然界和工程中许多流动问题都带有自由液面, 由于自由面的位置和形状是未知的, 需要由求解过程给出, 因此, 数值模拟这些自由面流动问题就变得十分困难, 为此人们提出了许多处理自由面的方法, 如MAC<sup>[1]</sup>, VOF<sup>[2]</sup>, Level-Set<sup>[3]</sup>等. 这些网格类方法已经在许多问题中得到应用, 但对于一些大变形的复杂流动问题, 如波浪的破碎、入水等, 这些传统方法往往不能精确模拟. 近年来, 一种无网格粒子法——SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法受到了人们的关注. SPH法是由L. B. Lucy<sup>[4]</sup>和R. A. Gingold等<sup>[5]</sup>提出的, 最初用于天体物理学中求解星际间的气体流动问题. SPH法的基本思想是: 将流体域用一系列有限数量的任意分布的粒子来表达, 这些粒子携带有质量、动量等物理特性, 粒子间的相互影响通过“光滑函数”积分来实现, 控制方程也以粒子形式来表达, 这些粒子按拉格朗日描述法运动, 于是追踪这些粒子就可以模拟整个流动问题. SPH法已被应用到许多研究领域, 如宇宙的演化<sup>[6]</sup>、星体的碰撞<sup>[7]</sup>、不可压流动<sup>[8]</sup>、磁流体力学<sup>[9]</sup>、热传导<sup>[10]</sup>、多孔介质流<sup>[11]</sup>、水下爆炸<sup>[12]</sup>、楔形体入水<sup>[13]</sup>和液舱晃动<sup>[14]</sup>等. 本文将SPH法应用到二维溃坝问题中, 通过与试验数据的比较来验证SPH法在这类自由面问题中的可靠性.

## 1 数值方法

### 1.1 控制方程

控制方程主要包括连续性方程及N-S方程:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + g \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{V}$  为速度矢量;  $\rho$  为流体密度;  $g$  为重力加速度;  $\boldsymbol{\sigma}$  为面应力张量.  $\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ . 其中:  $P$  为压力;  $\mathbf{I}$  为二阶单位张量;  $\boldsymbol{\tau}$  为黏性力.  $\tau^{\alpha\beta} = \mu \left( \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \delta^{\alpha\beta} \right)$ , 其中:  $\alpha, \beta$  为张量指标.

式(1)和(2)是以拉格朗日形式给出的, 在SPH法中, 控制方程不需要计算对流项, 这样避免了因对流项的离散而产生的数值耗散.

收稿日期: 2010-11-15

作者简介: 张喜秋(1984-), 女, 黑龙江绥化人, 助教, 硕士, 主要从事船舶航运研究. E-mail: zhangxiqiu165@126.com

## 1.2 粒子积分模型

在粒子法中,所有的控制方程将被离散成粒子形式,不同粒子间的相互影响通过核函数来体现,核函数的形式可以有很多种,比较常用的是 J. J. Monaghan 提出的 B 样条函数:

$$W(\theta, h) = \frac{15}{7\pi h^2} \begin{cases} 2/3 - \theta^2 + \theta^3/2, & 0 \leq \theta < 1 \\ (2 - \theta)^3/6, & 1 \leq \theta < 2 \\ 0, & \theta \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\theta=r/h$ ,  $r$  为粒子间的距离,  $h$  为光滑长度.

**1.2.1 密度模型** 在 SPH 法中,一点处的物理量  $\Phi$  可用支撑域内所有粒子上物理量的加权平均来获得,因此粒子  $i$  处的  $\Phi$  值可表示为:

$$\langle \Phi \rangle_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \Phi_j W(r_{ij}, h) \quad (4)$$

式中:  $j$  为支撑域内粒子的编号,  $r_{ij} = |r_i - r_j|$ ;  $m$  为粒子质量;  $\rho_j$  为粒子  $j$  的密度.

当  $\Phi$  为密度  $\rho$  时,由式(4)即可得到粒子  $i$  的密度计算式:

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h) \quad (5)$$

上式计算密度的方法也称密度求和法,这种计算密度的方法可以保证计算域内质量的守恒,但在应用时常常需要进行正则化处理:  $\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h) / \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r_{ij}, h)$

**1.2.2 梯度模型** 在 SPH 法中,任意函数  $\Phi(r)$  的梯度可写成下述粒子求和的形式:

$$\nabla \Phi(r_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \Phi(r_j) \nabla_i W(r_{ij}, h) \quad (6)$$

式中:  $\nabla_i$  表示对  $i$  求导.

与式(6)相似,对于散度的计算可表示为:

$$\nabla \cdot A(r_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} A(r_j) \cdot \nabla_j W(r_{ij}, h) \quad (7)$$

式中:  $A(r)$  为任意矢量函数.

应用式(6)和(7)即可对控制方程中的  $\sigma$  进行离散,但在 SPH 法中,离散形式常常可以进行多种变化,如将面应力项改写成下述形式:

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \sigma \right) + \frac{1}{\rho^2} \nabla \cdot \sigma \quad (8)$$

应用式(7)对式(8)进行离散即可得  $\sigma$  的计算格式如下:

$$\left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma \right)_i = \sum_j m_j \left( \frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (9)$$

这是一种常用的离散格式,有助于减小粒子不一致产生的误差.

## 1.3 时间步进格

SPH 法的时间步进方式有很多种,如预测修正法 (Predictor-Corrector)、蛙跳法 (Leap-Frog)、龙格库塔法 (Runge-Kutta) 等格式,本文使用蛙跳格式,计算过程如下:

$$V^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = V^t + \frac{1}{2}\Delta t \left( \frac{dV}{dt} \right)^{t-\frac{1}{2}\Delta t} \quad (10)$$

$$r^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = r^t + \frac{1}{2}\Delta t V^{t+\frac{1}{2}\Delta t} \quad (11)$$

在临时位置处计算粒子的受力,获得加速度,然后根据此时的加速度更新粒子的速度及位移:

$$V^{t+\Delta t} = V^t + \Delta t \left( \frac{dV}{dt} \right)^{t+\frac{1}{2}\Delta t} \quad (12)$$

$$r^{t+\Delta t} = r^t + \Delta t V^{t+\Delta t} \quad (13)$$

有时为了增加计算的稳定性,对式(13)做如下修改:

$$r^{t+\Delta t} = r^t + \Delta t V^{t+\Delta t} + \varepsilon \sum_j \frac{m_j}{\rho_{ij}} (V_j - V_i) W_{ij} \quad (14)$$

式中:  $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$ ,  $\varepsilon$  为常数,本文取 0.03.

式(14)中最后一项的引入相当于对粒子  $i$  的速度在作用域内做了一定程度的平均,该方法也称 XSPH,最早由 J. J. Monaghan (1994) [8] 提出,这种处理可很好地保证粒子移动的有序性,增加计算的稳定性.

#### 1.4 状态方程

在 SPH 法中,压力是由状态方程显式获得的,对于弱可压缩流体,状态方程 [15] 为:

$$P = B \left( \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (15)$$

式中:  $B = \rho_0 c^2 / \gamma$ ;  $c$  为声速;  $\rho_0$  是流体的参考密度;  $\gamma$  为常数,通常取  $\gamma = 7$ . 为保证流体密度的相对变化率不大于 1%,声速常取 10 倍于流体的最大速度,在溃坝问题中可取  $c = 10\sqrt{2gH}$ , 其中:  $H$  为水柱高度.

#### 1.5 自由面判别条件

在粒子法中,自由面的判断较为简单,由于自由面附近的粒子会遭遇粒子数的缺失,故其密度较小,于是可规定当粒子密度满足  $\rho_i < \beta_1 \rho_0$  ( $\beta_1$  为参数,本文取  $\beta_1 = 0.97$ ) 时,粒子将被视为自由面粒子,并使用零压力边界条件.

#### 1.6 固壁边界条件

在固壁处,粒子的支撑域会被截断,这使得积分计算结果失真,有时甚至会发生粒子的穿透,因此需特殊处理. 本文采用虚粒子法,即在边界上及边界外布置多层虚粒子,这些虚粒子具有和流体粒子相同的物理量,对于非运动边界其速度为 0,如图 1 所示.

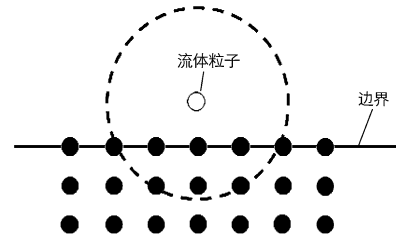


图 1 边界处的虚粒子布置方式

Fig. 1 Distribution of virtual particles on the boundary

## 2 数值算例

溃坝是典型的带自由面流动问题,由于流动过程中水面发生较大的变形,尤其是当水柱撞击到壁面或障碍物时,常常伴随着水面的翻卷、水花的飞溅等现象,因此传统的数值方法模拟这些现象较为困难. 本文选用了 2 个溃坝模型进行数值模拟,并通过与试验数据对比来验证 SPH 法的可靠性.

#### 2.1 溃坝模型 1

水柱宽为  $L$ , 高为  $2L$ ,  $L = 0.2$  m (见图 2), 计算域大小为  $4L \times 4L$ . 在数值模拟中,总粒子数为 6 815, 其中水体粒子数为  $N = 50 \times 100$ , 相应的初始粒子间距为  $l_0 = 0.004$  m. 初始时刻,粒子均匀分布,压力分布为静压,壁面采用不可滑移边界条件. 其余参数为:光滑长度  $h = 1.05l_0$ , 时间步长  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-5}$  s, 参考密度  $\rho_0 = 1\ 000$  kg/m<sup>3</sup>; 运动黏性系数  $\nu = 1.01 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, 重力加速度  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

由于 SPH 法是基于弱可压缩模型的,故时间步长不宜过大,一般要求满足 CFL 条件,即  $\Delta t c / l_0 \leq 0.25$ , 其中:  $c$  为声速;  $l_0$  为初始粒子间距.

不同时刻溃坝的数值模拟结果见图 3. 从图 3 可见,在  $t = 0.1$  s 时,水柱在重力作用下逐渐坍塌,水柱的

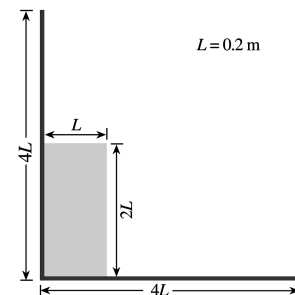


图 2 溃坝模型 1 的几何尺寸

Fig. 2 Dimension of dam break model 1

右下角处开始发生变形,水头沿着底面向右移动;在  $t=0.2\text{ s}$  时,水柱已经完全坍塌,水面变形较大;当  $t=0.4\text{ s}$  时,水柱撞击到右侧壁面,并沿着壁面上升,此时伴有水花的飞溅. 由于重力作用,上升的水流在  $t=0.8\text{ s}$  左右开始回落,于是水面发生翻卷, $t=0.9\text{ s}$  时再次撞入水中,并撞击出一水柱向左侧移动(图 3(f)).

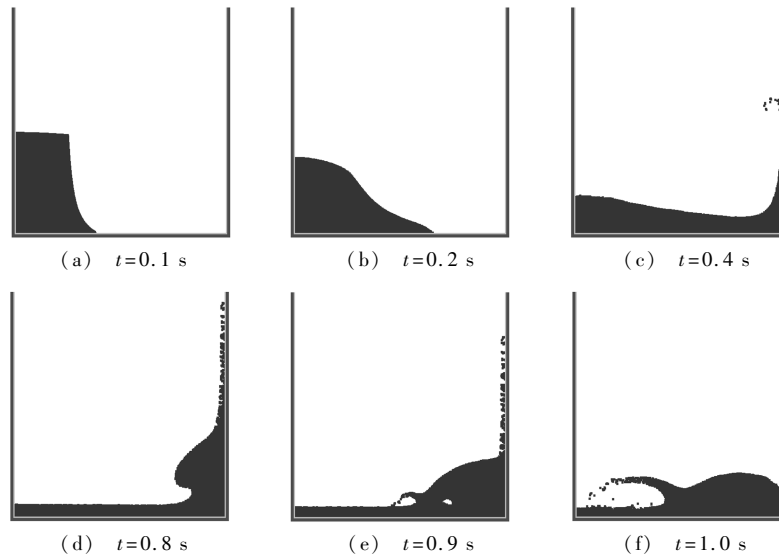


图3 不同时刻的粒子分布

Fig.3 Particle distribution at different moment

整体上看,流动比较复杂,尤其是当水柱撞击到右侧壁面以后,水面变化较为剧烈,但 SPH 法可较好地模拟出整个流动现象,可以比较清晰地追踪到自由面的位置,体现了无网格粒子法较强的适应性.

图 4 给出了无量纲化的水头随时间变化的曲线,并与 J. C. Martin 等<sup>[16]</sup>的试验数据进行比较. 从图中可以看到,数值模拟与试验数据基本吻合,这表明 SPH 法具有一定的可靠性.

## 2.2 溃坝模型 2

模型 2 与模型 1 不同的是水柱前端放置一障碍物(见图 5),水柱尺寸为: $L \times 2L$ ,  $L=0.146\text{ m}$ ,在水柱右侧  $L$  处有一大小为  $h \times 2h$  的小木块,  $h=0.024\text{ m}$ . 计算时,初始粒子间距为  $3 \times 10^{-3}\text{ m}$ ,粒子总数为 6 376,其中流体粒子数为 4 753,其余计算参数与模型 1 相同. 此溃坝模型与马理强等的溃坝流动模型<sup>[17]</sup>做了如下两点改进:一是流体粒子数由 965 个增加到 6 376 个,使得模拟结果更加直观清晰;二是保留溃坝流体前方障碍物,以便于与实际试验结果相比较.

图 6 和 7 给出了初始时刻的粒子分布状态和试验状态,试验数据来自于 S. Koshizuka<sup>[18]</sup>的研究成果.

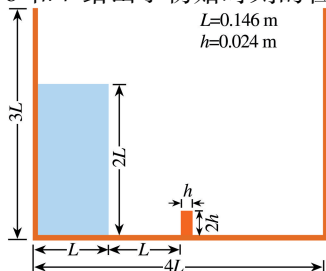


图5 溃坝模型 2 的几何尺寸

Fig.5 Dimensions of model 2

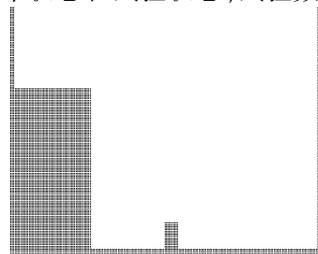


图6 初始粒子分布

Fig.6 Initial particle distribution

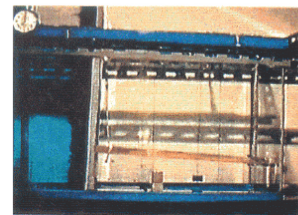


图7 试验初始状态

Fig.7 Initial experiment state

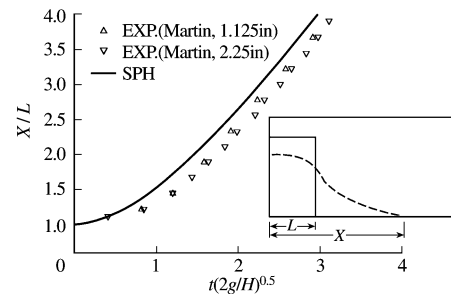


图4 水头随时间的变化曲线

Fig.4 Variation of water head with time

不同时刻的试验和数值计算结果如图 8 所示. 从图 8 可见, 当水柱前缘未撞到障碍物时, 水柱的变形和溃坝模型 1 相似, 水头沿底面向右移动; 当  $t=0.2$  s 时, 水柱撞击到了障碍物, 水面变化较为剧烈, 卷起一小水柱, 并迅速向右上方移动. 从计算结果中可见, SPH 法能比较好地模拟这样的复杂流动问题, 数值结果能够与试验数据相吻合, 表明 SPH 法在追踪自由面时具有一定的准确性.

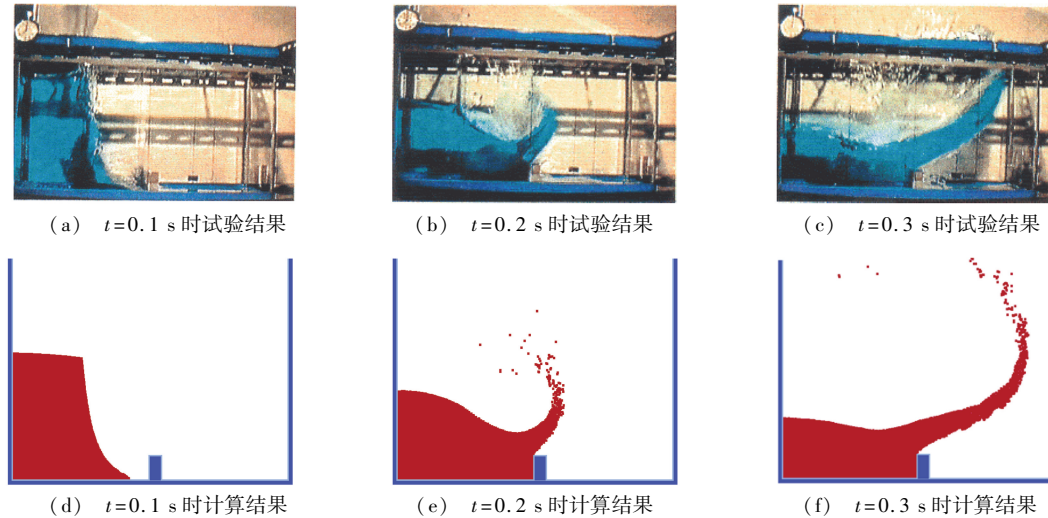


图 8 不同时刻的试验和数值计算结果

Fig. 8 Experimental results and numerical results at different moment

### 3 结 语

基于 SPH 法对 2 个二维溃坝问题进行了数值模拟, 没有障碍物时, 数值模拟得到的水头位置与试验数据相吻合, 当水柱撞击到壁面并发生翻卷、飞溅、入水等现象时, SPH 法能较好地捕捉到这些流动现象, 显示了无网格粒子法在处理复杂自由面问题时的巨大优势; 有障碍物时, 从水面遇到障碍物后卷起的水柱形状可以看到, SPH 法的模拟结果与试验吻合较好, 验证了 SPH 法的可靠性. 整体上看, SPH 法可较准确地追踪自由面的形状和位置, 在处理复杂的流动问题时, 具有传统网格类方法无法相比的灵活性, 同时 SPH 法还具有程序代码简单、计算效率较高等优点.

### 参 考 文 献:

- [1] HARLOW F H, WELCH J E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface[J]. *Physics of Fluids*, 1965, 8(12): 2182.
- [2] HIRT C W, NICHOLS B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 39(1): 201-225.
- [3] OSHER S, SETHIAN J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49.
- [4] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *The Astronomical Journal*, 1977, 82(12): 1013-1024.
- [5] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars[J]. *Royal Astronomical Society*, 1977, 181: 375-389.
- [6] MONAGHAN J J. Modelling the universe[C]//*Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, 1990: 233-237.
- [7] RASIO F A, SHAPIRO S L. Collisions of giant stars with compact objects-hydrodynamical calculations[J]. *The Astrophysical Journal*, 1991, 377: 559-580.
- [8] MONAGHAN J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 110: 399-399.



- [9] MORRIS J P. Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications[M]. Melbourne: Monash University, 1996.
- [10] CHEN J K, BERAUN J E, CARNEY T C. A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46(2): 231-252.
- [11] MORRIS J P, ZHU Y, FOX P J. Parallel simulations of pore-scale flow through porous media[J]. Computers and Geotechnics, 1999, 25(4): 227-246.
- [12] LIU M B, LIU G R, LAM Y K, et al. Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosion[J]. Computational Mechanics, 2003, 30(2): 106-118.
- [13] OGER G, DORING M, ALESSANDRINI B, et al. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 213(2): 803-822.
- [14] DELORME L, COLAGROSSI A, SOUTO-IGLESIAS A, et al. A set of canonical problems in sloshing, part I: Pressure field in forced roll-comparison between experimental results and SPH[J]. Ocean Engineering, 2009, 36(2): 168-178.
- [15] 巴切勒 G K. 流体动力学引论[M]. 沈青, 贾复, 译. 北京: 科学出版社, 1997. (BATCHELOR G K. An introduction to fluid dynamics[M]. SHEN Qing, JIA Fu. Beijing: Science and Technology Press, 1997. (in Chinese))
- [16] MARTIN J C, MOYCE W J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane[J]. The Royal Society, 1952, 244(882): 312-324.
- [17] 马理强, 常建忠, 刘谋斌, 等. 基于 SPH 方法的溃坝流动数值模拟[J]. 水利水运工程学报, 2010(3): 65-70. (MA Li-qiang, CHANG Jian-zhong, LIU Mou-bin, et al. Numerical simulation of dam-break flows using SPH method[J]. Hydro-Science and Engineering, 2010(3): 65-70. (in Chinese))
- [18] KOSHIZUKA S, OKA Y, TAMAKO H. A particle method for calculating splashing of incompressible viscous fluid[C]// Proceedings of the International Conference, Mathematics and Computations, Reactor Physics, and Environmental Analyses, 1995: 1514.

## Application of SPH method to solving free surface problems

ZHANG Xi-qiu<sup>1</sup>, YU Chang-li<sup>2</sup>

(1. Maritime College, Shandong Jiaotong University, Weihai 264200, China; 2. School of Naval Architecture, Harbin Institute of Technology, Weihai 264209, China)

**Abstract:** As a relatively new meshless particle method, smoothed particle hydrodynamics (SPH) method has an excellent advantage in dealing with largely-deformed free surface flows. The detailed numerical method about SPH is introduced in this paper, and two 2D dam break cases are simulated with SPH method. The numerical results are compared with experimental data, showing that: SPH method has a very good flexibility in tracking free surface. Though there are violent changes in free surface, such as turn up and breaking, SPH method can also capture these phenomena. In addition, the calculated position of toe of water and the shape of free surface are in agreement with experimental results. This proves SPH method has good accuracy and reliability in solving free surface problems, which traditional mesh method can not achieve. SPH method will be an effective tool for simulating the free surface in engineering practice.

**Key words:** meshless particle method; SPH method; free surface; dam break